Somatórios: propriedades e exercícios

Consideremos a seguinte soma:

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + 5^2 + 6^2 + 7^2 + 8^2 + 9^2 + 10^2.$$

Existe uma forma abreviada de representar esta soma, recorrendo a um símbolo, que designamos por símbolo de somatório $\sum$. Assim a soma anterior, passa a poder representar–se por

$$\sum_{k=1}^{10} k^2,$$

que se lê: somatório desde $k = 1$ até 10, de k^2. A letra k diz–se o índice da soma (ou do somatório) e pode ser substituída por qualquer outra (que não intervenha na soma), como por exemplo: i, j, l, m, n, p, etc. Diz–se assim que k é um índice mudo. O simbolo $\sum$ é a letra grega sigma maiúsculo do alfabeto grego.

Mais geralmente, a soma

$$a_p + a_{p+1} + \cdots + a_n,$$

pode ser representar–se abreviadamente por $\sum_{i=p}^{n} a_i$. Diz–se que p é o limite inferior e n o limite superior, do somatório.

Exemplos. 1) $2^2 + 2^3 + 2^4 + 2^5 = \displaystyle\sum_{i=2}^{5} 2^i$.

2) $\displaystyle\sum_{k=-1}^{4} k = -1 + 0 + 1 + 2 + 3 + 4 = 9.$

Propriedades dos Somatórios

Sejam m, $n \in \mathbb{N}$, tais que $m < n$ e a_i, $b_i \in \mathbb{R}$, para $i = m, m+1, \cdots, n$ e c uma constante real.

1) Propriedade Aditiva

$$\sum_{i=m}^{n} (a_i + b_i) = \sum_{i=m}^{n} a_i + \sum_{i=m}^{n} b_i.$$

2) Propriedade Homogénea

$$\sum_{i=m}^{n} (ca_i) = c \sum_{i=m}^{n} a_i.$$

3) Propriedade Telescópica

$$\sum_{k=m}^{n} (a_k - a_{k+1}) = a_m - a_{n+1}.$$

Demonstração de 1). A demonstração da propriedade anterior baseia–se nas propriedades comutativa e associativa da adição. Assim:

$$\begin{aligned}\sum_{i=m}^{n}(a_i+b_i) &= (a_m+b_m)+(a_{m+1}+b_{m+1})+\cdots+(a_n+b_n)\\ &= a_m+b_m+a_{m+1}+b_{m+1}+\cdots+a_n+b_n\\ &= a_m+a_{m+1}+\cdots+a_n+b_m+b_{m+1}+\cdots+b_n\\ &= \sum_{i=m}^{n}a_i+\sum_{i=m}^{n}b_i.\square\end{aligned}$$

Demonstração de 2).

$$\begin{aligned}\sum_{i=m}^{n}(ca_i) &= ca_m+ca_{m+1}+\cdots+ca_n\\ &= c(a_m+a_{m+1}+\cdots+a_n)\\ &= c\sum_{i=m}^{n}a_i.\square\end{aligned}$$

Demonstração de 3). Desenvolvendo o somatório $\sum_{k=m}^{n}(a_k-a_{k+1})$, obtemos a soma

$$(a_m-a_{m+1})+(a_{m+1}-a_{m+2})+(a_{m+2}-a_{m+3})+\cdots+(a_{n-2}-a_{n-1})+(a_{n-1}-a_n),$$

associando os termos de uma forma diferente, obtemos,

$$a_m+(-a_{m+1}+a_{m+1})+(-a_{m+2}+a_{m+2})+\cdots+(-a_{n-1}+a_{n-1})-a_n,$$

donde concluímos a fórmula.$\square$

Exemplos. 4) Seja c uma constante real, então $\sum_{i=m}^{n}c=c(n-m+1)$.

5) Tem–se $\sum_{k=0}^{n}k=\frac{n(n+1)}{2}$.

Demonstração. Da propriedade telescópica, temos que

$$\sum_{k=0}^{n}[(k+1)^2-k^2]=(n+1)^2.$$

Por outro lado,

$$\sum_{k=0}^{n}[(k+1)^2-k^2]=\sum_{k=0}^{n}(2k+1).$$

Usando as propriedades aditiva e homogénea, no último somatório, vem:

$$\sum_{k=0}^{n}[(k+1)^2-k^2]=2\sum_{k=0}^{n}k+\sum_{k=0}^{n}1.$$

Do Exemplo 4), vem então:

$$(n+1)^2=2\sum_{k=0}^{n}k+(n+1),$$

donde

$$\sum_{k=0}^{n} k = \frac{(n+1)^2 - (n+1)}{2} = \frac{n(n+1)}{2}.\Box$$

Exercício. Prove que

$$\sum_{k=0}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

Sugestão: Tenha em conta que $(k+1)^3 - k^3 = 3k^2 + 3k + 1$, a propriedade telescópica e o resultado do Exemplo 5).

Proposição. *Sejam* m, n, $\in \mathbb{N}$, $a_i \in \mathbb{R}$, *para* i$= m, \cdots, n$. Tem–se

a) $\displaystyle\sum_{k=m}^{n} a_k = \sum_{k=m+p}^{n+p} a_{k-p}, \qquad p \in \mathbb{Z}.$

b) $\displaystyle\sum_{k=m}^{n} a_k = \sum_{k=-n}^{-m} a_{-k}.$

Demonstração. Vejamos a prova de a).

$$\begin{aligned}\sum_{k=m}^{n} a_k &= a_m + a_{m+1} + a_{m+2} + \cdots + a_n \\ &= a_{m+p-p} + a_{m+p+1-p} + a_{m+p+2-p} + \cdots + a_{n+p-p} \\ &= \sum_{k=m+p}^{n+p} a_{k-p}.\Box\end{aligned}$$

Exercícios

1. Utilizando o simbolo de somatório, represente as seguintes somas
   (a) $z_1 + z_2 + \cdots + z_{27}$
   (b) $x_1y_1 + x_2y_2 + \cdots + x_{10}y_{10}$
   (c) $(a_2 - b_2) + (a_3 - b_3) + \cdots + (a_{15} - b_{15})$
   (d) $3^3 + 4^3 + \cdots + 10^3$
   (e) $b_0 + b_1x + b_2x^2 + b_3x^3 + b_4x^4$
   (f) $1 + 2^2 + 3^3 + 4^4 + \cdots + 25^{25}$

2. Calcule o valor de
   a) $\displaystyle\sum_{j=1}^{5} \frac{(-1)^{j+1}}{j}$ b) $\displaystyle\sum_{k=2}^{n} (2^k - 2^{k-1})$

3. Calcular, aplicando a propriedade telescópica,
   (a) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} ((k+1)^3 - k^3)$
   (b) $\displaystyle\sum_{i=2}^{n} \frac{1}{i(i-1)}$
   (c) $\displaystyle\sum_{j=10}^{500} \frac{1}{j(j+1)(j+2)}$ atendendo a que $\frac{1}{j(j+1)(j+2)} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{j(j+1)} - \frac{1}{(j+1)(j+2)}\right)$

4. Averigue o valor lógico de cada uma das proposições seguintes
   (a) $\displaystyle\sum_{k=0}^{200} k^3 = \sum_{k=1}^{200} k^3$
   (b) $\displaystyle\sum_{i=0}^{100} (3+i) = 3 + \sum_{i=0}^{100} i$
   (c) $\displaystyle\sum_{k=1}^{200} (3k) = 3\sum_{k=1}^{200} k$
   (d) $\displaystyle\sum_{k=0}^{12} k^3 = \left(\sum_{k=0}^{12} k\right)^3$
   (e) $\displaystyle\sum_{j=1}^{100} (3+j) = 300 + \sum_{j=1}^{100} j$

5. Determine k de modo que seja
   (a) $\displaystyle\sum_{i=1}^{50} (5+i) = 10k + \sum_{i=5}^{50} i$
   (b) $\displaystyle\sum_{i=1}^{10} (1+i)^2 = k + \sum_{i=1}^{10} i^2$

(c) $\sum_{i=10}^{20} i^2 = \sum_{i=10}^{18} i^2 + k$

(d) $\sum_{i=1}^{600} 5i^3 = 10k \sum_{i=1}^{600} i^3$

(e) $\sum_{i=0}^{51} (i+k) = (\sum_{i=1}^{51} i) + 104.$

6. Recorrendo a propriedades de somatórios calcule:

(a) $\sum_{i=0}^{50} (3+i)$

(b) $\sum_{k=0}^{10} (5+4k)$

(c) $\sum_{k=1}^{n} [(2k+1)^2 - (2k)^2]$

(d) $\sum_{k=1}^{n} ((5k+1)^2 - (5k-1)^2)$

(e) $\sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{5^k} - \frac{1}{5^{k+1}} \right)$

(f) $\sum_{i=1}^{n} \left(\frac{i+1}{2i-1} - \frac{i+2}{2i+1} \right).$

Soluções

1. (a) $\sum_{i=1}^{27} z_i$
   (b) $\sum_{i=1}^{10} x_i y_i$
   (c) $\sum_{i=2}^{15} (a_i - b_i)$
   (d) $\sum_{i=3}^{10} i^3$
   (e) $\sum_{i=0}^{4} b_i x^i$
   (f) $\sum_{i=1}^{25} i^i$
2. (a) $47/60$
   (b) $2^n - 2$
3. (a) $n^3 + 3n^2 + 3n$
   (b) $1 - 1/n$
   (c) $1/2(1/(10 \cdot 11) - 1/(501 \cdot 502))$
4. (a) Verdadeira.
   (b) Falsa.
   (c) Verdadeira.
   (d) Falsa.
   (e) Verdadeira
5. (a) $k = 26$
   (b) $k = 120$
   (c) $19^2 + 20^2$
   (d) $k = 1/2$
   (e) $k = 2$
6. (a) 1428
   (b) 275
   (c) $2n^2 + 3n$
   (d) $10(n^2 + n)$
   (e) $(5^n - 1)/5^{n+1}$
   (f) $3n/(2n + 1)$